

ROUMANIE

Lycée Louis-le-Grand, test pour l'entrée en classe préparatoire
MPSI, session 2008.

Durée du test : 4 heures

Les exercices ci-dessous peuvent être abordés dans un ordre quelconque. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 Déterminer le plus petit réel a tel que, pour tout $n \geq 1$, on ait $n! \leq an^{n+1}e^{-n}$.

Exercice 2 Soit a et b deux réels strictement positifs.
a. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$.
b. Montrer la même inégalité lorsque $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3 On pose $\alpha = (200)^{\frac{1}{6}}$. Déterminer des rationnels a_0, \dots, a_5 tels que

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}} = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_5\alpha^5.$$

Exercice 4 a. Déterminer une primitive de $\frac{1}{\cos t}$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On utilisera pour cela la fonction Arctan, fonction réciproque de la fonction tan qui réalise une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} .

b. Déterminer une fonction f deux fois dérivable sur \mathbb{R} telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$ et telle que, pour tout réel t , $f''(t) + \sin(f(t)) = 0$.

Exercice 5 Soit a un réel. Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} et telles que de plus, pour tout réel t , $f'(t) = f(a - t)$.

Exercice 6 Soit A, B, C et D des points du plan affine euclidien. Montrer que ces points sont cocycliques si et seulement si existent quatre réels a, b, c et d non tous nuls tels que, pour tout M ,

$$aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 + dMD^2 = 0.$$

TSVP

Exercice 7 a. On admet que π est un nombre irrationnel. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{|\sin n|}\right)_{n \geq 1}$ est bien définie.

b. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{|\sin n|}\right)$ ne tend pas vers $+\infty$.

Exercice 8 Soit d un entier supérieur ou égal à 1 et $P(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_0$ un polynôme à coefficients complexes.

a. Soit r un réel strictement positif tel que $r^d \geq |a_{d-1}|r^{d-1} + \dots + |a_0|$. Montrer que toute racine complexe z de P vérifie $|z| \leq r$.

b. Montrer que toute racine complexe z de P vérifie $|z| \leq \max_{1 \leq k \leq d} (d|a_{d-k}|)^{\frac{1}{k}}$.

Exercice 9 Soit E une ellipse de demi-axes a et b . Quelle est l'aire maximale d'un quadrilatère convexe inscrit dans cette ellipse ?

Exercice 10 Soit (u_n) et (v_n) deux suites complexes. On suppose que les suites $(u_n v_n^2)$ et $(u_n^2 - v_n^2)$ sont bornées. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées.